International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
SCHOLAR AI
Be Smart
Vol. 47 No. 2 November 2024, pp. 423-435

Elaboration Des Algorithmes De Factorisation Lu, Inverse Des Matrices Par La Méthode De Gauss-Jordan & Méthode De Croute Cas Des Matrices 2x2, 3x3 & 4x4

Butsana Sita Lucien Adam

Congo, the Democratic Republic

Abstract – Nous avons mis en évidence l'élaboration des algorithmes de factorisation et de calcul d'inverse des matrices par la méthode de Gauss –Jordan : le lien existant entre le déterminant d'une matrice, la factorisation et le calcul de l'inverse d'une matrice ainsi que la résolution du système d'équation. Le choix de la méthode de Gauss –Jordan de par sa description ne laisse pas entendre ce lien ; pourtant après élimination judicieuse entre ligne : on retrouve le déterminant de la matrice. Fort de ce constat, nous concluons que toutes ces différentes opérations sur le calcul matriciel n'est possible que si et seulement si le déterminant de la matrice est non nul. Cette condition nécessaire suffisante n'est toujours pas si explicite par les étudiants en classe de préparatoire. Ainsi, Nous avons le bonheur de présenter cet article comme étant :

(a) Un outil permettant de factoriser par la méthode de LU : les matrices 2x2, 3x3 et 4x4

(b) Un outil permettant de calculer directement l'inverse des matrices 2x2, 3x3 et 4x4

(c) un outil de calcul permettant d'alléger par le billet des algorithmes de factorisation cas des matrices 2x2 , 3x3 et 4x4 : La méthode de Croute pour la résolution des systèmes d'équations linéaires ayant deux équations à deux inconnues, trois équations à trois inconnues et même quatre équations à inconnues.

(d) Un outil permettant de faciliter la méthode de matrice Inverse pour la résolution des systèmes d'équations linéaires.

Comme perspective d'avenir, nous aimerons établir une relation de récurrence permettant de Généraliser ces algorithmes établit préalablement mais cela fera sans aucun doute l'objet d'un tout autre article.

Keywords – Algorithmes De Factorisation, Lu, Inverse, Matrices, Méthode De Gauss-Jordan & Méthode De Croute, Matrices 2x2, 3x3 & 4x4.

I. Introduction

I.1 Problématique

Après avoir enseigner le cours d'algèbre, ces dernières années ; nous avons constaté que les étudiants de classe de préparatoire en du mal à calculer les inverses des matrices, factorisation et de résolution des systèmes d'équations linéaires. Ainsi donc, nous avons préconisé de mettre en place des algorithmes leur permettons de calculer sans avoir à effectuer la démarche analytique. Dans le cadre de cet article, nous exposons ces algorithmes.

I.2 Objectif de notre recherche

Mettre en exergue le déterminant dans le calcul de factorisation des matrices, du calcul de l'inverse d'une matrice, dans la résolution des systèmes d'équations.

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 47 No. 2 November 2024, pp. 423-435

I.3 Motivations

Il n'est toujours pas facile de réaliser la place qu'occupe-le déterminant d'une matrice lors calcul de l'inverse d'une matrice ainsi que dans la résolution des systèmes d'équations linéaires. Toutes ces opérations ne sont possibles que si et seulement si le déterminant de la matrice est non nul. Fort de cela, nous mettons en place de divers algorithmes permettant de calculer facilement l'inverse des matrices, de factoriser et de trouver les solutions des systèmes d'équations sans avoir à effectuer le moindre calcul.

Ces algorithmes deviennent de plus en plus difficiles à calculer analytiquement, ainsi nous démontrons la complexité de calcul qui entre en compte dans les algorithmes de calcul de factorisation, inverse et résolution des systèmes d'équations linéaires de taille $m \times n$**.**

Il serait quasiment impossible et fastidieux de refaire les mêmes calculs qui sont développées plus bas pour les matrices d'ordre supérieur à 4.

II. Algorithme de factorisation LU

1ier Cas : Matrices 2x2

Toute matrice A peut-être factorisé par la méthode LU :

$$\mathrm{A}_{m*n} = \mathrm{L}_{m*n}\mathrm{U}_{m*n}$$

Ou

L_{m*n} Est une matrice Triangulaire Inférieur

U_{m*n} Est une matrice Triangulaire Supérieur

Pour Une matrice A_{2*2} :

$$\mathrm{A}_{2*2} = \mathrm{L}_{2*2}\mathrm{U}_{2*2}$$

Considérons une matrice quelconque de taille A_{2*2}

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{l}_{11} & 0 \\ \mathrm{l}_{21} & \mathrm{l}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{u}_{11} & \mathrm{u}_{21} \\ 0 & \mathrm{u}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{l}_{11} ; \mathrm{l}_{22} = 1 ; \mathrm{u}_{11} = a \; et \; \mathrm{u}_{21} = b$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{l}_{21} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \mathrm{u}_{22} \end{pmatrix}$$

$$a\mathrm{l}_{21} = c$$

$$\mathrm{l}_{21} = \frac{c}{a}$$

$$b\mathrm{l}_{21} + \mathrm{u}_{22} = d$$

$$b(\frac{c}{a}) + \mathrm{u}_{22} = d$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 47 No. 2 November 2024, pp. 423-435

$$\mathrm{u}_{22} = \frac{ad - bc}{a}$$

On sait déjà qu'un déterminant 2x2 s'écrit :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ad - bc$$

$$\mathrm{u}_{22} = \frac{\Delta}{a}$$

Ainsi, on obtient l'algorithme de factorisation LU pour les matrices de taille 2x2 :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{\Delta}{a} \end{pmatrix}} \qquad (1)$$

<u>Test (1)</u>

Utilisons l'algorithme (1) ; pour factoriser la matrice A et prouver que A= LU

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>R</u>

$$\Delta = 30$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 0 & \frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

<u>Preuve :</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 0 & \frac{15}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Application de l'algorithme de factorisation dans la résolution des systèmes d'équations linéaires: La méthode de Croute pour les systèmes d'équations 2 x 2 :

Sous la forme matricielle :

$$AX = B$$

Or

$$A = LU$$

$$(LU)X = B$$

$$LY = B \qquad (2)$$

$$UX = Y \qquad (3)$$

La relation (2) et (3) permet de trouver les solutions d'un système par la méthode de Croute. Nous allons directement utiliser l'algorithme de Factorisation développer dans la relation (1) afin de rendre plus commode la méthode de Croute :

Algorithme de Croute : Système d'équation 2 x 2

$$LY = B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_1 \\ \frac{c}{a} y_1 + y_2 = b_2 \end{cases}$$

$$y_2 = \frac{b_2 a - c y_1}{a}$$

$$UX = Y$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{\Delta}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a x_1 + b x_2 = b_1 \\ \frac{\Delta}{a} x_2 = y_2 \end{cases}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{a y_2}{\Delta}} \qquad (5)$$

$$a x_1 + b x_2 = b_1$$

$$\boxed{x_1 = \frac{b_1 - b x_2}{a}} \qquad (6)$$

En vertu de l'algorithme (1) ; La méthode de croute peut être directement mise sous la forme (5) et (6).

Test (2) : Trouver par la méthode de Croute, les solutions du système ci-après :

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

R

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
SCHOLAR AI Be Smart
Vol. 47 No. 2 November 2024, pp. 423-435

$$y_1 = b_1 \; ; y_1 = 4 \; ; y_2 = \frac{1}{5} \; ;$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - bx_2}{a}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}$$

Preuve :

$$5x_1 + 2x_2 = 7$$

$$5(\frac{2}{3}) + 2\left(\frac{1}{3}\right) = 4$$

$$\frac{10}{3} + \frac{2}{3} = 4$$

2ieme Cas : Matrices 3x3

Soient

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$l_{21} = \frac{d}{a} \; ; bl_{21} + u_{22} = e \; ; u_{22} = \frac{ea - bd}{a}$$

$$c\, l_{21} + u_{23} = f \; ; \frac{cd}{a} + u_{23} = f \; ; u_{23} = \frac{fa - c}{a}$$

$$al_{31} = g \; ; l_{31} = \frac{g}{a}$$

$$l_{32} = \frac{ha - bg}{ea - b}$$

$$cl_{31} + l_{32}u_{23} + u_{33} = i \; ; u_{33} = i - \frac{cg}{a} - l_{32}u_{23}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d/a & 1 & 0 \\ g/a & ha - bg/ea - bd & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & ea - bd/a & fa - cd/a \\ 0 & 0 & i - \frac{cg}{a} - l_{32}u_{23} \end{pmatrix}}$$

Test (3)

Utilisons l'algorithme (7) ; pour factoriser la matrice A et prouver que A= LU

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 47 No. 2 November 2024, pp. 423-435

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>R</u>

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d/a & 1 & 0 \\ g/a & ha - bg/ea - bd & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & ea - bd/a & fa - cd/a \\ 0 & 0 & i - \frac{cg}{a} - \mathrm{l}_{32}\mathrm{u}_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

<u>Preuve:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3^{ieme} Cas : Matrices 4x4

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

$$al_{21} = e\,;\ l_{21} = \frac{e}{a}\ : bl_{21} + u_{22} = f\,;\ u_{22} = \frac{fe - be}{a}\ ; cl_{21} + u_{23} = g\,; u_{23} = \frac{ga - ce}{a}\ ; dl_{21} + u_{24} = h\,;\ u_{24} = \frac{ha - de}{a}$$

$$al_{31} = i\,;\ l_{31} = \frac{i}{a}\ : bl_{31} + l_{32}u_{22} = j\,;\ l_{32} = \frac{ja - bi}{fe - be}\ ; cl_{31} + l_{32}u_{23} + u_{33} = k\,; u_{33} = k - \ cl_{31} - l_{32}u_{23}\,;\ \ dl_{31} + l_{32}u_{24} + u_{34} = l\,;\ u_{34} = \mathrm{l} - \ \ dl_{31} - l_{32}u_{24}$$

$$al_{41} = m\,;\ l_{41} = \frac{m}{a}\ : bl_{41} + l_{42}u_{22} = n\,;\ l_{42} = \frac{na - bm}{fe - be}\ ; cl_{41} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} = o\,; l_{43} = \frac{o - cl_{41} - l_{42}u_{23}}{u_{33}}\ ;\ \ dl_{41} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + u_{44} = p\,;\ u_{44} = \mathrm{p} - \ \ dl_{41} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34}$$

Finalement :

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
SCHOLAR AI Be Smart
Vol. 47 No. 2 November 2024, pp. 423-435

$$A_{4x4} = L_{4x4}\, L_{4x4}$$

$$A_{4x4} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

$$L_{4x4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ e/a & 1 & 0 & 0 \\ i/a & ja - bi/fe - be & 1 & 0 \\ m/a & na - bm/fe - be & o - cl_{41} - l_{42}u_{23}/u_{33} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_{4x4} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & fe - be/a & ga - ce/a & ha - de/a \\ 0 & 0 & k - \ cl_{31} - l_{32}u_{23} & \mathrm{l} - \ dl_{31} - l_{32}u_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{p} - \ dl_{41} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} \end{pmatrix}$$

III. Algorithme de Gauss-Jordan

1^ier^ Cas : Matrices 2x2

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{array}\right)$$

$$l_1 = |1 \quad 0 \quad a \quad b \ ; \ l_2 = |0 \quad 1 \quad c \quad d$$

$$l_2 = al_2 - cl_1$$

$$l_2 = -|c \quad a \quad 0 \quad ad - bc$$

$$l_1 = dl_1 - bl_2$$

$$l_1 = d| \quad -b \quad ad - bc \quad 0$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} d & -b & ad - bc & 0 \\ -c & a & 0 & ad - bc \end{array}\right)$$

Or

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 47 No. 2 November 2024, pp. 423-435

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \text{ad-bc}$$

$$\text{l}_1 = \frac{l_1}{\Delta}$$

$$\text{l}_2 = \frac{l_2}{\Delta}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} d/\Delta & -b/\Delta & 1 & 0 \\ -c/\Delta & a/\Delta & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{pmatrix}}$$

Test de l'algorithme (3)

Utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan 2x2 pour calculer l'inverse de la matrice suivante et montrer que A $A^{-1} = \text{I}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

R

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -3/7 & 5/7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -3/7 & 5/7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2ieme Cas : Matrices 3x3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 1 & g & h & i \end{array}\right)$$

$$l_1= a \quad b \quad c \; ; \quad l_2= d \quad e \quad f \; ; l_3= g \quad h \quad i$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{a} & \text{b} & \text{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \text{i(ae} - \text{bd)} - \text{f(ah} - \text{bg)} + \text{c(dh} - \text{eg)}$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/

Vol. 47 No. 2 November 2024, pp. 423-435

Faisons

$$l_3 = el_3 - il_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & d & e & f \\ 0 & -h & e & eg-dh & 0 & ei-fh \end{array}\right)$$

Faisons

$$l_1 = el_1 - bl_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e & -b & 0 & a & 0 & c \\ ed & -ae & 0 & d & e & f \\ 0 & -h & e & eg-dh & 0 & ei-fh \end{array}\right)$$

Faisons

$$l_2 = dl_1 - (ae - bd)l_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e & -b & 0 & ae-bd & 0 & ce-bf \\ ed & -ae & 0 & 0 & -e(ae-bd) & e(cd-af) \\ e(dh-eg) & -e(ah-bg) & e(ae-bd) & 0 & 0 & ei-fh \end{array}\right)$$

Faisons

$$l_3 = (ae - bd)l_3 - (eg - dh)l_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e & -b & 0 & ae-bd & 0 & ce-bf \\ ed & -ae & 0 & 0 & -e(ae-bd) & e(cd-af) \\ e(dh-eg) & -e(ah-bg) & e(ae-bd) & 0 & 0 & e\Delta \end{array}\right)$$

Faisons

$$l_2 = e\Delta l_2 - e(cd - af)l_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e & -b & 0 & ae-bd & 0 & ce-bf \\ e^2(ae-bd)(di-fg) & e^2(ae-bd)(ai-cg) & e^2(ae-bd)(cd-af) & 0 & -e^2(ae-bd)\Delta & 0 \\ e(dh-eg) & -e(ah-bg) & e(ae-bd) & 0 & 0 & e\Delta \end{array}\right)$$

Faisons

$$l_1 = \frac{l_1}{e(ae-bd)\Delta}$$

$$l_2 = -\frac{l_2}{e^2(ae-bd)\Delta}$$

$$l_3 = \frac{l_3}{e\Delta}$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/

SCHOLAR AI Be Smart

Vol. 47 No. 2 November 2024, pp. 423-435

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{ei-fh}{\Delta} & -\frac{(bi-ch)}{\Delta} & \frac{(bf-c\ )}{\Delta} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(di-fg)}{\Delta} & \frac{ai-cg}{\Delta} & -\frac{af-c}{\Delta} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{dh-eg}{\Delta} & \frac{bg-ah}{\Delta} & \frac{ae-bd}{\Delta} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On obtient finalement, l'algorithme de Gauss-Jordan pour les matrices 3 x3

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{ei-fh}{\Delta} & \frac{ch-bi}{\Delta} & \frac{bf-ce}{\Delta} \\ \frac{fg-di}{\Delta} & \frac{ai-cg}{\Delta} & \frac{cd-af}{\Delta} \\ \frac{dh-eg}{\Delta} & \frac{bg-ah}{\Delta} & \frac{ae-bd}{\Delta} \end{pmatrix}} \qquad (4)$$

<u>Test de l'algorithme (4)</u>

Utilisons l'algorithme (4) ; pour calculer l'inverse de la matrice A et prouver que $AA^{-1} = I$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>R</u>

$\Delta = 4$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{ei-fh}{\Delta} & \frac{ch-bi}{\Delta} & \frac{bf-ce}{\Delta} \\ \frac{fg-di}{\Delta} & \frac{ai-cg}{\Delta} & \frac{cd-af}{\Delta} \\ \frac{dh-eg}{\Delta} & \frac{bg-ah}{\Delta} & \frac{ae-bd}{\Delta} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2(2)-1(1)}{4} & \frac{1(1)-1(2)}{4} & \frac{1(1)-1(2)}{4} \\ \frac{1(1)-1(2)}{4} & \frac{2(2)-1(1)}{4} & \frac{1(1)-2(1)}{4} \\ \frac{1(1)-2(1)}{4} & \frac{1(1)-2(1)}{4} & \frac{2(1)-1(1)}{4} \end{pmatrix}$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 47 No. 2 November 2024, pp. 423-435

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Preuve :

On sait que :

$$A^{-1}\text{A}=\text{I}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3ieme Cas : Matrices 4x4

$$\left(\begin{array}{c|ccc cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & e & f & g & h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m & n & o & p \end{array}\right)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$\Delta = (af - be)(kp - lo) + (ce - ag)(jp - lm) + (ak - de)(jo - km) + (bg - cf)(ip - lm) + (df - bh)(io - km$

Après avoir éliminé les lignes comme dans le cas des matrices 3x3 : On obtient finalement le résultat ci-après :

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 47 No. 2 November 2024, pp. 423-435

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{f(kp-lo)-g(jp-\ln)+h(jo-kn)}{\Delta} & \frac{-b(kp-lo)+c(jp-\ln)-d(jo-kn)}{\Delta} & \frac{b(gp-ho)-c(fp-hn)+d(fo-gn)}{\Delta} & \frac{-b(gl-hk)+c(fp-hn)+d(fo-gn)}{\Delta} \\ \frac{-e(kp-lo)+g(ip-lm)-h(io-km)}{\Delta} & \frac{a(kp-lo)-c(ip-lm)+d(io-km)}{\Delta} & \frac{-a'gp-ho)+c(ep-hm)-d(eo-gm)}{\Delta} & \frac{a(gl-hk)-c(el-hi)+d(ek-gi)}{\Delta} \\ -\frac{e(jp-\ln)\ -\mathrm{f(ip-lm)+h(in-jm)}}{\Delta} & \frac{-a(jp-\ln\ )+b(ip-lm)-d(in-jm)}{\Delta} & \frac{a(fp-hn)-b(ep-hm)+d(en-fm)}{\Delta} & \frac{-a(fl-hj)+b(el-hi)-d(ej-fi)}{\Delta} \\ \frac{-e(jo-kn)+f(io-km)-g(in-jm)}{\Delta} & \frac{a(jo-\mathrm{kn}\ )-b(io-km)+c(in-jm)}{\Delta} & \frac{-a(fo-gn)+b(eo-gm)-c(en-fm)}{\Delta} & \frac{a(fk-gj)-b(ek-gi)+c(ej-fi)}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Conclusion

Nous avons mis en évidence l'élaboration des algorithmes de factorisation et de calcul d'inverse des matrices par la méthode de Gauss –Jordan : le lien existant entre le déterminant d'une matrice, la factorisation et le calcul de l'inverse d'une matrice ainsi que la résolution du système d'équation. Le choix de la méthode de Gauss –Jordan de par sa description ne laisse pas entendre ce lien ; pourtant après élimination judicieuse entre ligne : on retrouve le déterminant de la matrice. Fort de ce constat, nous concluons que toutes ces différentes opérations sur le calcul matriciel n'est possible que si et seulement si le déterminant de la matrice est non nul. Cette condition nécessaire suffisante n'est toujours pas si explicite par les étudiants en classe de préparatoire. Ainsi, Nous avons le bonheur de présenter cet article comme étant :

(a) Un outil permettant de factoriser par la méthode de LU : les matrices 2x2, 3x3 et 4x4

(b) Un outil permettant de calculer directement l'inverse des matrices 2x2, 3x3 et 4x4

(c) un outil de calcul permettant d'alléger par le billet des algorithmes de factorisation cas des matrices 2x2 , 3x3 et 4x4 : La méthode de Croute pour la résolution des systèmes d'équations linéaires ayant deux équations à deux inconnues, trois équations à trois inconnues et même quatre équations à inconnues.

(d) Un outil permettant de faciliter la méthode de matrice Inverse pour la résolution des systèmes d'équations linéaires.

Comme perspective d'avenir, nous aimerons établir une relation de récurrence permettant de Généraliser ces algorithmes établit préalablement mais cela fera sans aucun doute l'objet d'un tout autre article.

Références

[1]. Ronald W. Larsen, Labview for engineers, Montana State University, 2015

[2]. Pierre BOUSQUET & al., Mathématiques générales II-Algèbre linéaire, Université Aix-Marseille 1, PEIP-L1, 2012

[3]. Arnaud Bodin & al., Algèbre, COURS DE MATHÉMATIQUES PREMIÈRE ANNÉE, Université de Lille 1 et Unisciel, 2016

[4]. http://home.hit.no/~hansha/ University College of Southeast Norway

[5]. FPGA module training : http://zone.ni.com/devzone/cda/tut/p/id/3555

[6]. I2C NXP User Manual UM10204 : http://www.nxp.com/documents/user_manual/ UM10204.pdf