

Sur Les Equations Différentielles Et La Stabilité Des Filtres Linéaires, Les Systèmes Asservis

TAMBA OF'R I'SHII Gordien¹ and Gérard TAWABA MUSIAN TA-YEN²

¹Membre du Centre International des Mathématiques Pures et Appliquées (France)

^{1,2}Faculté des sciences

Département de Mathématique et Informatique

Université pédagogique nationale

B.P. 8815 Kinshasa/ Ngaliema

R.D.Congo

Corresponding author: TAMBA OF'R I'SHII Gordien; gordientamba23@gmail.com; Tél. +243 81 86 69 666



Résumé – La notion de stabilité, dans l'étude des systèmes, notamment dans celle des filtres linéaires et dans celle des systèmes asservis, est la plus importante. D'une façon générale, un système est dit stable si, écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir. Il est dit instable s'il tend à s'en éloigner. La notion de fonction de transfert pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles linéaires à coefficients constants permet de traduire cette stabilité par des conditions algébriques ou des conditions graphiques précises. Il s'agit, dans cet article, d'expliquer ces conditions à propos des filtres et à propos des systèmes asservis dont, à cette occasion, après une brève définition, nous précisons la notion de fonction de transfert. L'étude d'un exemple numérique permet de mettre en place une méthode algébrique pour illustrer la stabilité.

Mots clés – Equations différentielles, filtres linéaires, systèmes asservis, fonction de transfert.

Abstract – The concept of stability is crucial in studying systems, particularly linear filters and control systems. Generally, a system is considered stable if it tends to return to its equilibrium position when displaced from it. In contrast, an unstable system moves away from its equilibrium position. The transfer function concept allows us to express stability in terms of precise algebraic or graphical conditions for systems governed by linear differential equations with constant coefficients. In this article, we explain these conditions concerning filters and control systems and clearly define the transfer function. We then use a numerical example to establish an algebraic method for illustrating stability.

Keywords – Differential equations, Linear filters, Control systems, Transfer function.

Définitions

Un filtre est dit "stable au sens strict" si, à toute entrée fonctionnelle bornée correspond une sortie également bornée dans le cas où la réponse impulsionnelle h est une fonction, cela équivaut à la sommabilité de h ($h \in \mathbb{L}^1$).

Un filtre est dit "stable au sens large" si h est bornée et si elle ne contient qu'un nombre fini de distributions du Dirac.

Application

I. Stabilité d'un filtre à partir de sa fonction de transfert.

Soit un filtre linéaire gouverné par une équation différentielle. La réponse impulsionnelle est alors la solution d'une équation du type

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k y^{(k)} = \delta$$

En transformant formellement par \mathcal{L}_b , on obtient $P(\rho)H(\rho) = 1$ où P est le polynôme caractéristique de l'équation et $H = \mathcal{L}_b(h)$ (autrement dit, la fonction de transfert du filtre). A un coefficient multiplicatif près, cette fonction de transfert est donc caractérisée par l'ensemble de ses pôles. Nous examinons la stabilité d'un filtre pour lequel P est du second degré et nous supposons que h est causale (le filtre est alors dit "causal").

I.1. Nous supposons que le polynôme caractéristique est $ap^2 + bp + c$. En décomposant la fonction de transfert H et en discutant suivant la nature des zéros et P , Déterminons toutes les expressions possibles pour la réponse impulsionnelle h .

Pour cela, nous factorisons P sous la forme $P(p) = a(p - z_1)(p - z_2)$ avec, éventuellement égalité des zéros. L'inverse de P , c'est-à-dire H se décompose en somme de deux fractions qui sont respectivement les images de Laplace de $\kappa(t)e^{z_1 t}$ et $\kappa(t)e^{z_2 t}$ ou encore, si le pôle est double de $\kappa(t)t e^{z_1 t}$ et $\kappa(t)e^{z_1 t}$. La fonction h est donc de la forme $h(t) = \kappa(t)(Ae^{z_1 t} + Be^{z_2 t})$ ou de la forme

$$\kappa(t)(At + B)e^{z_1 t}$$

I.2. Nous désignons par z_1 et z_2 les pôles de H (ou par z_1 le pôle double). Trouvons les conditions, portant sur ces pôles, pour que le filtre soit stable au sens strict. Nous commencerons par prouver que cette stabilité équivaut, dans le cas présent, à ce que cette réponse h tende vers 0 en $+\infty$. Ce sont ces conditions, convenablement généralisées que nous considérons pour définir la stabilité au sens strict :

Un filtre causal, dont la fonction de transfert est de type rationnel $H = \frac{P}{Q}$ avec $\deg(P) < \deg(Q)$ est stable au sens strict si tous les pôles de H ont leur partie réelle strictement négative. Lorsque, et c'est trop souvent le cas, la recherche des zéros d'un polynôme est pratiquement impossible, le critère de ROUTH permet par des opérations successives sur les coefficients de reconnaître si cette condition est vérifiée. Nous renvoyons à des livres plus spécialisés pour l'explication de ce critère. Dans le cas des systèmes asservis linéaires (voir ce qui suit) nous utilisons un autre critère, celui de NYQUIST.

Dans le cas où le filtre n'est pas causal, H est la transformée bilatère de h , qui est donc caractérisée par sa bande de convergence $B_h = \{p/\sigma_+(h) < \text{Ré}(p) < \sigma_-(h)\}$. Alors, en appliquant successivement le critère précédent aux deux fonctions h_+ et \tilde{h} , nous arrivons au critère suivant qui implique le précédent dans le cas de causalité :

Un filtre dont la fonction de transfert H vérifie $\deg(P) < \deg(Q)$ est stable au sens strict si l'axe des imaginaires purs est dans la bande de sommabilité B_h (ou domaine de validité de H).

Nous constatons que les modules de ces exponentielles sont $\exp(t \delta_{\text{Ré}(z_1)})$ et $\exp(t \delta_{\text{Ré}(z_2)})$. La fonction h n'est sommable que si ces exponentielles tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, autrement dit, si les deux parties réelles des pôles sont strictement négatives.

II. Fonctions de transfert d'un système asservi

Un tel système peut être modélisé en l'ensemble de deux circuits ou "branches", une branche directe et une branche de retour. Nous désignons l'entrée par e et la sortie par s . La branche de retour (dans un cas idéal) réinjecte s à l'entrée et la branche directe fait correspondre à la différence $\varphi = e - s$ la sortie s du système. En supposant toutes ces fonctions causales et transformables par \mathcal{L} , les correspondances précédentes qui sont des convolutions peuvent se traduire par des produits $S = KG\Phi$ et $\Phi = E - S$. Les grandes lettres désignent les transformées de Laplace, K est un coefficient constant, G une fonction de p telle que KG soit la fonction de transfert de la branche directe (nous respectons ainsi les notations habituelles). La fonction KG est encore appelée la fonction de transfert du système en boucle ouverte. Nous désignons par H la fonction de transfert du système asservi. C'est-à-dire le rapport entre E et S . Pour étudier un système asservi, nous utilisons souvent le lieu de NYQUIST. Il s'agit de l'ensemble des

points M du champ complexe dont l'affixe est égale à $KG(i\omega)$ lorsque ω décrit \mathbb{R} , autrement dit, le transformé de la droite des imaginaires purs dans la transformation qui a z associe $KG(z)$.

On a :

$$\omega \mapsto KG(i\omega) \text{ ou } \omega \mapsto KG(2\pi i\lambda)$$

est la réponse en fréquence du système en boucle ouverte.

II.1. Déterminons H à l'aide de KG . Montrons que les pôles de la fonction de transfert du système asservi sont définis par l'équation $1 + KG(p) = 0$. Le système asservi sera stable si les racines de cette équation sont toutes de parties réelles négatives.

Dans le cas des systèmes asservis, nous utilisons le critère de NYQUIST :

Un système asservi linéaire est stable si, lorsqu'on décrit le lieu de NYQUIST dans le sens de ω croissant, on laisse à sa gauche le point d'affixe -1 "point critique".

Comme critère de ROUTH, ce critère est admis. Nous nous proposons seulement de traiter deux cas particuliers simple où nous les vérifions.

En effet, il suffit d'éliminer ϕ entre les deux équations de transfert. Nous avons $S = KG(E - S)$ d'où la formule :

$$H(p) = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)}$$

cette fraction a ses pôles définis par l'équation $1 + KG(p) = 0$ car le numérateur $KG(p)$ ne peut s'annuler en même temps, la différence étant égale à 1. Autrement dit, si G est une fraction rationnelle. Après réduction au même dénominateur dans les deux termes de H , les pôles de H seront données en résolvant $1 + KG(p) = 0$.

II.2. Nous supposons que $KG(p) = p - (a + ib)$. Nous savons donc que $1 + KG(p) = 0$ a pour seule racine $z_0 = a - 1 + ib$, de partie réelle $a - 1$. En utilisant éventuellement des arguments de type géométrique, le lieu de NYQUIST du système en précisant sa nature.

Déduisons en, dans ce cas, une démonstration de NYQUIST.

De ce fait, posons $c = a + ib$. La transformations : $z \mapsto z - c$ est une translation. La droite des imaginaires purs se transforme donc en une droite parallèle d'abscisse $\text{Ré}(-c) = -a$. Cette droite est orientée dans le sens des y croissant. Elle laisse à gauche le point critique d'affixe -1 si et seulement si $-a > -1$ ou encore $a - 1 < 0$. Or, la racine de $1 + KG(p) = 0$ est $z_0 = a - 1 + ib$ et sa partie réelle est $a - 1$. Dans ce cas, le critère de NYQUIST est bien démontré.

Nous pouvons faire également des calculs analytiques.

II.3. Nous supposons que $KG(p) = \frac{1}{p - (a + ib)}$, l'équation $1 + KG(p) = 0$ admet donc une seule racine $z_0 = a - 1 + ib$ de partie réelle $a - 1$. En utilisant éventuellement des arguments de type géométrique, dessinons le lieu de NYQUIST du système en précisant sa nature. Déduisons en, dans ce cas, une démonstration du critère de NYQUIST.

Pour ce point, nous nous servons encore des transformations géométriques. Le lieu de NYQUIST est le transformé de l'axe des y par la composée de la translation $z \mapsto z - c$ et de l'inversion - symétrie (on dit aussi : inversion complexe. C'est la composée commutative d'une inversion géométrique et d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisses) $z \mapsto \frac{1}{z}$. Dans la translation, l'axe des y devient la droite parallèle d'abscisse $-a$, laquelle devient ensuite, sauf si $a = 0$, un cercle centré sur l'axe des réels, passant par O , privé O de et dont le point diamétralement opposé à O et d'abscisse $-\frac{1}{a}$.

Dans le cas $a = 0$, la transformée est l'axe des y parcouru dans le sens positif. Cette transformée laisse le point critique à gauche.

Dans le cas où $a < 0$, le cercle est situé tout entier dans le demi-plan où les abscisses sont positives, il est parcouru dans le sens indirect (la symétrie change le sens de parcours), par conséquent, il laisse à gauche le point critique. Enfin, dans le cas où $a > 0$, ce cercle, situé dans le demi-plan des points d'abscisses négatives, est parcouru dans le sens direct ; il laisse le point critique à gauche si et seulement si le point critique est à l'intérieur géométrique de ce cercle, c'est-à-dire si $-\frac{1}{a} < -1$ ou bien $a < 1$. Pour résumer, la condition de NYQUIST est vérifiée si $a < 1$. Or la racine de $1 + KG(p) = 0$ est ici $z_0 = a - 1 + ib$; la condition de NYQUIST équivaut bien à la négativité de sa partie réelle.

III. Etude de la stabilité dans un cas numérique plus compliqué

i) La fonction de transfert G d'un système (en boucle ouverte) dit "régulateur" est défini par : $G(p) = \left(1 + \frac{A}{p}\right) \left(\frac{1}{p(p+3)}\right)$ où $A > 0$.

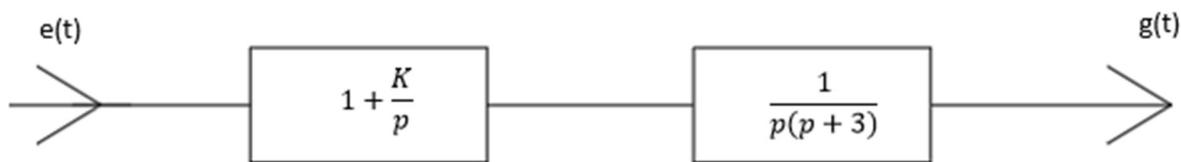


Figure 1

III.1. Soit ω un nombre strictement positif. Exprimons à l'aide de ω les parties réelle et imaginaire du nombre complexe $G(i\omega)$

Après calculs et application des hypothèses, nous trouvons :

$$G(i\omega) = -\frac{\omega^2 + 3A}{\omega^2(\omega^2 + 9)} + i \frac{A - 3}{\omega(\omega^2 + 9)}$$

III.2. En étudiant les variations de ces fonctions "partie réelle" et "partie imaginaire", en fonction de ω , sur $]0, +\infty[$, puis les limites aux bornes, donnons l'allure de la courbe (lieu de NYQUIST) en se contentant des deux cas particuliers $A = 2$ et $A = 4$.

Déterminons la monotonie et les extremums à partir de ces deux parties. Alors les dérivées sont données par les formules :

$$x'(\omega) = \frac{2(\omega^4 + 6A\omega^2 + 27A)}{\omega^3(\omega^2 + 9)^2}, y'(\omega) = \frac{3(3 - A)(\omega^2 + 3)}{\omega^2(\omega^2 + 9)^2}$$

ii) Le lieu précédent va servir pour l'étude du système en boucle fermée dont la fonction de transfert H est définie par :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

III.3. Etudions la stabilité du système asservi dans les deux cas $A = 2$ et $A = 4$

Pour $A = 2$, les deux dérivées sont positives. Les fonctions croissent de $-\infty$ à 0 , le rapport $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{Y}{X} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{Y'}{X'} = 0$. Nous en déduisons l'allure du lieu de NYQUIST en complétant la courbe par la symétrie par rapport à l'axe des réels (est paire et Y est impaire).

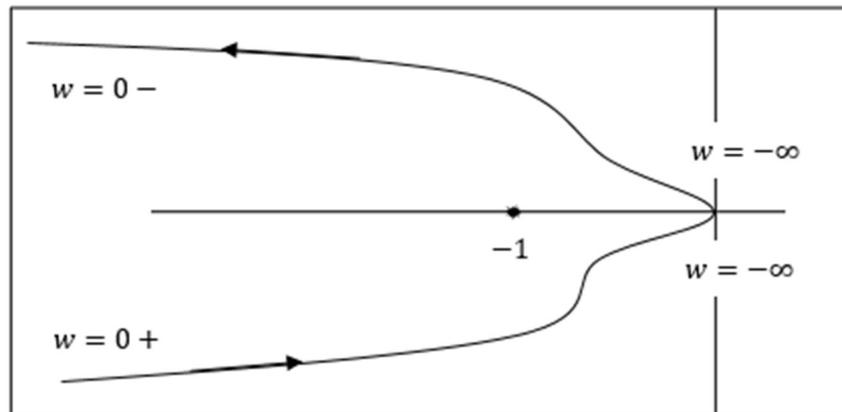


Figure 2

Dans le cas où $A = 4$, on a $x' > 0$ et $y' < 0$, l'allure est grossièrement la même mais le lieu est parcouru dans le sens inverse. Nous avons remarqué sur le lieu correspondant à $A = 2$ le sens de parcours (suivant les ω croissant). On voit que le point critique est à gauche, le système est donc stable. Par contre, pour $A = 4$ le point critique est à droite et, par conséquent, le système est instable.

III.4. Ecrivons l'expression de $H(p)$ pour $A = 20$. Cherchons la réponse du système asservi à l'impulsion δ . Montrons que, dans ce cas, le système est instable.

Nous trouvons pour $A = 20$,

$$H(p) = \frac{p + 20}{(p + 4)(p^2 - p + 5)}$$

Il est facile de calculer la réponse impulsionnelle, qui n'est autre que l'original de cette fraction. Dans cette image inverse, nous trouvons en particulier des exponentielles dont l'exposant possède une partie réelle positive, ce qui se voit d'ailleurs immédiatement en considérant le trinôme $p^2 - p + 5$. Nous en concluons que le système est instable.

Références

- [1] A. Angot, compléments de Mathématiques, Ed. Revue Optique, Paris, 1965.
- [2] M.R. Spiegel, Transformées de Laplace, Ed. Mc Graw-Hill, Paris, 1980.
- [3] N. Piskounov, Calcul différentiel et Intégral, Ed. Mir, Moscou, 1980.
- [4] J. Bass, Cours de Mathématiques, Ed. Masson, Paris, 1978.
- [5] Y. Ayant, M. Borg, Fonctions spéciales, Ed. Dunod, Paris, 1971.
- [6] Y. Noiro, J.P. Parisot, N. Brouillet, Mathématiques pour la physique, Ed. Dunod, Paris, 1997.
- [7] J.P. Demailly, Analyse numérique et Equations différentielles, Ed. Presses universitaires de Grenoble, 1991.
- [8] M. Lavrentiev, B. Chabat, Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, Ed. Mir, Moscou, 1977.
- [9] M.R. Spiegel, Transformées de Laplace, Ed. Mc Graw-Hill, Paris, 1980.
- [10.] M. Denis-Papin, A. Kaufmann, Cours de calcul opérationnel, Ed. Albin Michel, Paris, 1950.
- [11] J.F. Nye, Propriétés physiques des cristaux, Ed. Dunod, Paris, 1961.

- [12] D.C Champeney, Fourier transforms and their physical applications, Ed. Academic Press, Londres, 1973.
- [13] M. Abramowitz, I.A. Stegun, Handbook of mathematical functions, Ed. Dover Publications, New York, 1970.
- [14] F. Bayen et C. Margaria, Distributions, Analyse de Fourier, Transformées de Laplace, Tome 3, Ed. Ellipses, Paris, 1998.
- [15] L. Schwartz, Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Ed. Hemann, Paris, 1997.
- [16] A. Zygmund, Trigonometric series, Ed. Fefferman, Londres, 2003.
- [17] H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Ed. Gauthier – Villars, J. Gabay, 1989.